(概)自由因子を定める大波面について (可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学)

田邊, 晋

数理解析研究所講究録
第 1707 巻 2010 年 76-93

(概) 自由因子を定める大波面について

田邊晋 (Susumu Tanabé)
熊本大学自然科学研究科数理科学講座
Department of Mathematics, Kumamoto University
Matematik Bölümü, Galatasaray Üniversitesi, Istanbul

1 導入

波面＝等距離曲面 (equidistant surface) = 平行曲面 (parallel surface) の上にあらわれる特異点の研究は、C.G.Jacobi の白鳥の歌であるところの「動力学講義」Vorlesungen über Dynamik の第 6 講義「最小作用の原理」に現れる 4 頂点定理として 19 世紀の半ばに既にその端緒を窺い見ることができる。楕円体曲面上の一点 p から出発したお互いに非常に近い測地線の (p 以外の) 交点のなす集合 C に関して、Jacobi は C が楕円の縮閉曲線 (evolute) と近い形ををもつことに言及している。この一言が 4 頂点定理として把握されているらしい [4]。

20 世紀後半以降、近年においては V.I.Arnol'd [3] および V.M.Zakalyukin が 1976 年頃に関連した論文を発表して以来、波面が人々の注目を再びあびるようになったようである。ちなみに Arnol'd 自身は [3] を以て自由因子や対数的ベクトル場の概念が初めて (つまり [13] に先駆けて) 導入されたと認識していたようである。数学的概念や結果の定式化に当たって、彼は読者から「一を聴いて十を知る」姿勢を常に要求し仮想し続けていたので 1976 年の段階において判別式集合をその接ベクトルが事実上決定するという考えたかの本質にはすでに到着しており、それを [13] のように纏めなかっただけである、と言いたかったのかもしれない。

筆者は [14] において、波動方程式に付随する Cauchy 問題の初期値が準斉次多項式の零点上にデルタ関数 $\delta(F(x))$ のような (または $1/F(x)$ のような) C^∞ 特異性を持っている場合にその時間発展解の C^∞ 特異性をある種の Gauss-Manin 系の解を用いて表示することを試みた。[14] の主目的は波面の特異点の近傍における Cauchy 問題の解の漸近的挙動を詳しく記述することであったが (I.G.Petrovsky, Atiyah-Bott-Gårding によって調べられた空隙の問題に対する貢献)、この際当然のことながら、解の C^∞ 特異性の位置する曲面＝波面の幾何学に関してもある種の知見が副産物として得られた。本稿では波面の幾何学の側面にのみ論述を限定して [14] において課されていた初期波面の準斉次性を仮定しない理論を提案する。

20 世紀の末に V.I.Arnol'd は Francesca Aicardi に次のような問題を提起したという。

問題：楕円体 $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$ から定速波を発展させて得られるような波面の perestroika の状況を (a, b, c) 空間の分岐図式 (bifurcation diagram) として描け。

たとえば $(a, b, c) = (0.6, (0.6)^{1/4} + 0.001, 1)$ とすると、波面上にはある時点において 2 個の A_3 (燕の尾) をその端に持つ「唇」が対称的に 2 つ現われ (つまり総計 4 個の A_3 特異点を波面はもつ)、そののち二つの唇がそれぞれ点に収縮して、再び二つの唇が前述の

２点に加えて特異点として現れる、などなど。Aicardi は数値計算による実験で分岐図式が少なくとも３つの連結成分を持つことを示した [1]。こうした数値計算（波面の形状を実際の３次元空間内の曲面として実現する）は確かに視覚的に訴える力強さを持っているが、
1）方法論的な観点から見てその場限りのものであるという感がある、
2）実代数多様体の変形理論、大域的変分問題といったより大きな数学的枠組みの中での位置づけが明瞭でない、
という短所がそこに内在されていることは否めない。この方法では連結成分の本当の数は厳密に求められていないことはもちろんのこと、分岐図式の高余次元滑層に対応する波面の perestroika（おそらくそこでは A_3 よりもさらに余次元の高い特異点が波面上出現するであろう）を記述することは恐らく不可能である。ちなみに筆者が Maksim Kazarian 氏に上記の問題の定式化を伝えた際、「楕円体などという不自然に対称性の高い曲面を初期波面として Arnol'd が設定することはあり得ない。Arnol'd は常に物理的に実現可能な問題設定をするのであるから。」と氏は論評された。この言は上記の短所２）に直接関係するものと理解することができる。本研究ではこうした短所を多少でも是正する方向性を打ち出すことも将来的目標として眼中におかれている。しかしながら、現状において、本研究の方法によって得られる波面の定義方程式およびその接ベクトル場の表示式として得られるものはあまりに膨大でそこから何らかの意味のある大域的な幾何学的量を導出することは困難である ([16]5 章参照)。こういった問題を将来的に克服できなければこの方向性はその存在を正当化できないであろう。

Arnol'd 学派の波面研究（上記の Aicardi による試みなどの若干例を除けば）においては、Legendre ないし Lagrange 特異点を与える生成関数を局所的な微分同相などによって標準形に直したうえで、波面の特異点の型に関する議論を行っているので、大域的にどういう特異点が現れるのかに関しては答えを与えない。ちなみに偏微分方程式の解を表示するような振動積分の研究を行った J.Duistermaat の仕事も Lagrange 多様体を定義する相関数をあらかじめ標準形に直してから焦点の周りの積分の漸近挙動を解析している。論文 [14] においては Duistermaat の仕事の大域化を目指すことも目論まれていた。

この原稿のもう一つの目的はある種の波面が概自由因子の例を与えていることを示すことにある。この種の因子に関しては J.Damon [7] および D.Mond [12] によって研究の端緒が与えられた。前者は消滅 homology の階数を与え、後者は概自由因子の特異 Milnor 纖維の消滅 cohomology を詳しく微分形式の言葉を用いて記述している。彼らの研究は [8] において発見された概自由因子の特異 Milnor 数（概自由因子の変形として得られる自由因子に関連して得られる bouquet 分解の homotopy 群としての階数）の位相的不変性に端を発している。こうした位相幾何学的に興味深い結果が得られてはいるが、Damon,Mond 両氏の一連の仕事の中において概自由因子の非自明な実例は乏しい感がある。本稿で展開されている自由因子 D_φ の多項式写像によるひき戻し $\iota^{-1}(D_\varphi)$ として波面を捉えるという観点は、 [7] において展開された概自由因子の特徴付けの主要な方向性に沿ったものに他ならない。

本研究が双曲型偏微分方程式の Cauchy 問題 (J.Leray)、Lagrange 特異性 (V.I.Arnol'd)、自由 (齋藤恭司) および概自由因子 (J.Damon) といった多様でありながら統一性を内包する研究方向のつなぎ目となることができれば幸甚である。

2　波面に関する準備事項

この章においては今後の議論に必要となる概念や記号を導入する。

記号 $Y := \{(z,u) \in \mathbb{C}^{n+1}; F(z) + u = 0\}$ によって、実多項式 $F(z) \in \mathbb{R}[z_1, \cdots, z_n]$,

$z=(z_1,\cdots,z_n)$ によって定まる複素超曲面を表し、これが波の発展の初期超曲面であるとする。この際実初期超曲面は $Y\cap\mathbb{R}^{n+1}$ によって与えられる。

点 $(z,u)\in Y$ から出発し Y の (z,u) における法線方向に速度1で進む波の動きを考える。この波が点 $(x_1,\cdots,x_{n+1})$ に時刻 t に到着するとすれば、この点は次の条件を満たしていなければならない

$$x_j=\pm t\frac{1}{|(d_zF(z),1)|}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}+z_j, 1\leq j\leq n,$$

$$x_{n+1}=\pm t\frac{1}{|(d_zF(z),1)|}+u \text{ with } (z,u)\in Y. \tag{2.1}$$

以下 $x'=(x_1,\cdots,x_n)$, $x=(x',x_{n+1})$ という記号を用いる。

上記の点 (x,t) と (z,u) が (2.1) を満たしているならば、これらは次の相関数 (phase function) の零点となっていなければならない。

$$\psi_{\pm}(x,t,z,u)=(\langle x'-z,d_zF(z)\rangle+(x_{n+1}-u))\pm t|(d_zF(z),1)|, \tag{2.2}$$

ここで $\psi_+(x,t,z,u)$ は後進波 (resp. $\psi_-(x,t,z,u)$ は前進波) の伝播をそれぞれ表す。議論を見やすくするために、後進波と前進波の双方の情報を含んだ単一の相関数

$$\psi(x,t,z,u):=\psi_+(x,t,z,u)\cdot\psi_-(x,t,z,u)$$

$$=(\langle x'-z,d_zF(z)\rangle+(x_{n+1}+u))^2-t^2|(d_zF(z),1)|^2, \tag{2.3}$$

に今後は注目することとする。

記号 W_t でもって時刻 t における Y を初期波面とする波面を表すこととする。つまり $Y=W_0$ である。

Lemma 2.1

波面上の点 $x\in W_t$ に対し (x,t) は次の射影の臨界値集合に属する,

$$\begin{array}{ccc}\{(z,u)\in Y:\psi(x,t,z,u)=0\} & \to & \mathbb{C}^{n+2}\\ (x,t,z,u) & \mapsto & (x,t).\end{array}$$

この事実を理解する方法はいくつかあるが、筆者の論文 [14] においては幾何学的解釈のかわりに次のような積分の C^∞ 特異点として波面をとらえる見方を採用した。

$$I(x,t)=\int_\gamma H(z,u)\left(\frac{1}{\psi_+(x,t,z,u)}+\frac{1}{\psi_-(x,t,z,u)}\right)dz\wedge du$$

ここで $\gamma\in H_n(Y)$ であり、$H(z,u)\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ という関数である。上記の積分は Gel'fand-Leray 積分の一般論よりその特異点集合 W_t の周りで分岐し, W_t は補題 2.1 で言及された臨界値集合に含まれる。

集合 $BW:=\cup_{t\in\mathbb{C}}W_t\subset\mathbb{C}^{n+1}$ (その実部を Arnol'd [2] I, 22.1, [3] は大波面と呼んだ) は関数 (相関数と呼ぶ)

$$\Psi(x,t,z):=(\langle x'-z,d_zF(z)\rangle+x_{n+1}+F(z))^2-t^2(|d_zF(z)|^2+1) \tag{2.4}$$

の判別式集合の部分集合として理解可能である。ここで $x'=(x_1,\cdots,x_n)$ である。 この集合は代数多様体

$$X_{x,t}:=\{z\in\mathbb{C}^n:\Psi(x,t,z)=0\}$$

が特異点をもつような (x,t) の集合として捉えられる。今後 BW を複素大波面と呼ぶことにする。

長谷川大、福井敏純両氏の研究 [11] において、波面=平行曲面 W_t は距離２乗関数

$$\Phi(x,t,z) = -\frac{1}{2}(|(x'-z, x_{n+1}+F(z))|^2 - t^2), \tag{2.4$'$}$$

の判別式集合として定義されている。これは球面 $\{(z, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |(z-x', z_{n+1} - x_{n+1})|^2 = t^2\}$ と初期波面 $Y \cap \mathbb{R}^{n+1}$ が２次の接触をするという条件から得られるものである。相関数 (2.4) を用いる代わりに $\Phi(x,t,z)$ を用いて解析すると、中途の BW の関する計算が簡略化される場合がある。 いづれにしろ第３章において従順多項式 $\varphi(z,s)$ に仮定される条件を満たしている限り、そののちの議論は相関数に対しても距離２乗関数に対しても同様に成り立つ。

今後多様体 $X_{x,t}$ は時空の各点 (x,t) において高々孤立特異点をもつものと仮定する。これらの点の内 $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^{n+2}$ としてその上の繊維の局所 Milnor 数の和が最大となるようなものを特に選び「焦点」と名付けることとする。 焦点は複数存在する可能性もある。特異点 $z^{(1)}, \cdots, z^{(k)}$ が X_{x_0,t_0} 上に位置するとし、その各点に対応する Milnor 数を $\mu(z^{(i)})$, $i=1,...,k$ で表記し、その和を μ_f(焦点強度) で表す。 焦点強度 μ_f に対してすべての点 $(x,t) \in \mathbb{C}^{n+2}$ について次の不等式が成立する,

$$\text{sum of Milnor numbers of singular points on } X_{x,t} \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(z^{(i)}) = \mu_f.$$

以下次の状況を仮定する。商環

$$\frac{\mathbb{C}[z]}{(d_z\Psi(x_0,t_0,z))\mathbb{C}[z]} \tag{2.5}$$

が μ 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間であり基底として $\{e_1(z), \cdots, e_\mu(z)\}$ をもちそのうち初めの $n+1$ 個としては

$$e_1(z) = 1, e_{j+1}(z) = (z_j - z_j^{(i)}), 1 \leq j \leq n, \tag{2.6}$$

という表示を固定された $i \in [1,k]$ ものを選ぶことができる。ここで $\sum_{i=1}^{k} \mu(z^{(i)}) \leq \mu$ となることに注意する。(2.5) の分母にあらわられる $(d_z\Psi(x_0,t_0,z))\mathbb{C}[z]$ は相関数 (2.4),$\Psi(x_0,t_0,z)$ のヤコビイデアルを意味する。

差

$$\Psi(x,t,z) - \Psi(x_0,t_0,z) = \sum_{j=1}^{m} s_j(x,t)e_j(z)$$

を z に関する多項式 $\{e_1(z), \cdots, e_\mu(z), e_{\mu+1}(z), \cdots, e_m(z)\}$ と (x,t) の多項式を z に関する多項式 $\{s_1(x,t), \cdots, s_m(x,t)\}$ 用いて表現する。ここで得られた係数多項式から次の写像

$$\begin{array}{cccc} \iota : \mathbb{C}^{n+2} & \to & \mathbb{C}^m \\ (x,t) & \mapsto & \iota(x,t) := (s_1(x,t), \cdots, s_m(x,t)) \end{array} \tag{2.7}$$

を定義する。この定式化によれば(2.5) の基底のほかに $\{e_{\mu+1}(z), \cdots, e_m(z)\}$ という多項式を導入したことになる。変形パラメータ $s=(s_1,\cdots,s_m)$ に対して多項式 $\varphi(z,s)\in\mathbb{C}[z,s]$ を次のように定義する

$$\varphi(z,s)=\Psi(x_0,t_0,z)+\sum_{j=1}^{m}s_je_j(z). \tag{2.8}$$

局所的にこれは $\Psi(x_0,t_0,z)$ の点 $z=z^{(i)}$ における普遍（versal）変形（ただし最小普遍(miniversal) ではない）を与えている。

3 従順多項式の判別式

無限大などで扱いにくい特異点をもったりしないおとなしい多項式という意味で従順(tame) 多項式という概念が導入された。

Definition 3.1. 多項式 $f(z)\in\mathbb{C}[z]$ が次の条件を満たすとき従順であるという。$f(z)$ の臨界点集合のコンパクトな近傍 K に対し、$z\notin K$ ならば $\|d_zf(z)\|=\sqrt{(d_zf(z),\overline{d_zf(z)})}$ が 0 とならない。

以後記号 $s'=(s_2,\cdots,s_m)$ と $s=(s_1,s')$ を用いる。

今後 (2.8) で導入された $\varphi(z,s)$ に対して次の条件を課すこととする。開集合 $0\in V\subset\mathbb{C}^{m-1}$ が存在して

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z]}{(d_z\varphi(z,s))\mathbb{C}[z]}<\infty, \tag{3.1}$$

が各 $s'\in V$ および $s_1\in\mathbb{C}$ に対して成立する。これに加えて各 $s=(s_1,\cdots,s_{n+1},0,\cdots,0)\in V$, に対し等式

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z]}{\left(d_z(\Psi(x_0,t_0,z)+\sum_{j=2}^{n+1}s_je_j(z))\right)\mathbb{C}[z]}=\mu, \tag{3.1$'$}$$

が成立することも仮定する。

Lemma 3.1. 条件 (2.5), (3.1), (3.1)$'$ の下で構成可能（*constructible)* 集合 $\tilde{U}\subset V$ が存在し $\varphi(z,s)$ は各 $s\in\mathbb{C}\times\tilde{U}$ に対して従順であり、しかも

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z]}{(d_z\varphi(z,s))\mathbb{C}[z]}=\mu,$$

が各 $s\in\mathbb{C}\times\tilde{U}$ に対して成り立つ。

略証明文献[5], Proposition 3.1 によって (3.1)$'$ は $\varphi(z,0)$ の従順性を導く。同論文 Proposition 3.2 によると $\varphi(z,s)$ が従順多項式となるような s の集合は構成可能集合であり、明らかに $W\subset V$ に対して $\mathbb{C}\times W$ の形をしている。[5], Proposition 2.3 より各 n に対して

$$T_n=\{s\in\mathbb{C}\times W: dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[z]}{(d_z\varphi(z,s))\mathbb{C}[z]}\leq n\},$$

は Zariski 閉集合である。$\mathbb{C}\times\tilde{U}=T_\mu\setminus T_{\mu-1}$ ととることによって問題の $\tilde{U}$ が得られる。
証明終わり

仮定 I

(i) 集合 $\tilde{U}$ をもし必要とあらば収縮させて、構成可能集合 $U \subset \tilde{U}$ が局所的に座標変数 $(s_2, \cdots, s_\nu)$, $\nu \geq \mu$ に依存する正則関数 $(s_{\nu+1}, \cdots, s_m)$ の「グラフ」として表されているものとする。

(ii) 写像 ι による (x_0, t_0) の近傍の像は $\mathbb{C} \times U$ に含まれているものとする。つまり

$$\iota(\mathbb{C}^{n+2}, (x_0, t_0)) \subset (\mathbb{C} \times U, \iota(x_0, t_0))$$

を仮定する。

一般にこれらの関数 $(s_{\nu+1}, \cdots, s_m)$ は変数 $(s_2, \cdots, s_\nu)$ の代数関数であるが、分岐集合を避け分枝を選ぶことによって $pr : U \to \mathbb{C}^{\nu-1}$ が正則関数のグラフから座標変数の空間への射影としてみなすことができるような状況を考えている。

仮定 I,(i) で導入された構成可能集合 $U \subset V$ の固定された各点 $\tilde{s}' = (\tilde{s}_2, \cdots, \tilde{s}_m) \in U$ に対し $\varphi(z, s_1, \tilde{s}')$ は $s_1 \in \mathbb{C}$ の値にかかわらず従順である。この従順多項式 $\varphi(z, s_1, \tilde{s}')$ に付随した次のような加群を考える。

$$\mathcal{P}_\varphi(\tilde{s}') := \frac{\Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^n}}{d_z\varphi(z, s_1, \tilde{s}') \wedge \Omega^{n-2}_{\mathbb{C}^n} + d\Omega^{n-2}_{\mathbb{C}^n}}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{B}_\varphi(\tilde{s}') := \frac{\Omega^{n}_{\mathbb{C}^n}}{d_z\varphi(z, s_1, \tilde{s}') \wedge d\Omega^{n-2}_{\mathbb{C}^n}}. \tag{3.3}$$

加群 $\mathcal{B}_\varphi(\tilde{s}')$ は代数的 Brieskorn 格子と呼ばれる ([9])。多項式 $\varphi(z, s_1, \tilde{s}')$ を正則微分形式に乗じたものを (3.2), (3.3) で 0 とみなすことによって、これらの加群を $\mathbb{C}[s_1]$ 加群として捉えることができる。

これらの加群には多様体

$$Z_{(s_1,\tilde{s}')} = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z, s_1, \tilde{s}') = 0\}. \tag{3.4}$$

の位相幾何に関する基本的情報が含まれている。

記号 $D_\varphi \subset \mathbb{C} \times U$ によって多項式 $\varphi(z, s)$ の判別式集合を表すこととしよう。つまり

$$D_\varphi := \{s \in \mathbb{C} \times U : \exists z \in Z_s,\ s.t.\ d_z\varphi(z, s) = \vec{0}\}. \tag{3.5}$$

である。

Dimca-斉藤 [9] Theorem 0.5 などを用いて次を得る ([16] 2, 3 章参照)。

Theorem 3.2. 固定された $\tilde{s}' = (\tilde{s}_2, \cdots, \tilde{s}_m) \in U$, に対し $\mathcal{P}_\varphi(\tilde{s}')$ と $\mathcal{B}_\varphi(\tilde{s}')$ の双方は階数 μ の自由 $\mathbb{C}[s_1]$ 加群となる。

各点 $\tilde{s}' = (\tilde{s}_2, \cdots, \tilde{s}_m) \in U$ に対応して,

$$Q_\varphi(\tilde{s}') := \frac{\Omega^{n}_{\mathbb{C}^n}}{d_z\varphi(z, s_1, \tilde{s}') \wedge \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^n}} \cong \frac{\mathbb{C}[z]}{(d_z\varphi(z, s_1, \tilde{s}'))\mathbb{C}[z]}, \tag{3.6}$$

という 3 つ目の加群を導入する。これもまた階数 μ の自由 $\mathbb{C}[s_1]$ 加群となることは次の同相写像より分かる。

$$\oplus_{\{s_1 : Z_{(s_1,\tilde{s}')}\ \text{singular}\}} \oplus_{z: singular\ points\ on\ Z_{(s_1,\tilde{s}')}} \mathbb{C}^{\mu(z)},$$

ここで $\mu(z)$: は特異点 $z \in Z_{(s_1,\tilde{s}')}$ における Milnor 数である。$\mathbb{C}[s_1]$ 加群 $Q_\varphi(\tilde{s}')$ の基底を

$$\{g_1 dz, \cdots, g_\mu dz\}, \tag{3.7}$$

の形で採ることにする。ここで $\{g_1(z),\cdots,g_\mu(z)\}$ は (3.6) の右辺の自由 $\mathbb{C}[s_1]$ 加群としての基底である。

次の写像が局所的自明 fibration を与えることは [5],p.218, lines 5-6 から従う。

$$Z_{(s_1,s')} \to (s_1,s') \in \mathbb{C}\times U \setminus D_\varphi.$$

これより次の系を得る。

Corollary 3.3. 加群 $\mathcal{P}_\varphi(\tilde{s}')$ の基底 $\{\omega_1,\cdots,\omega_\mu\}$ を $\tilde{s}'\in U$ と無関係に選ぶことができる。

構成可能集合 U の構成法から、U 上の正則関数の環 $\mathcal{O}_U$ を普通の意味の開複素多様体上の関数環として考えることができる。媒介変数 $s'\in U$ に関する解析接続によって次を得る。

Lemma 3.4. *3* つの加群 $\mathcal{B}_\varphi(s')$, $\mathcal{P}_\varphi(s')$, $Q_\varphi(s')$ は階数 μ の自由 $\mathbb{C}[s_1]\otimes\mathcal{O}_U$ 加群である。

変形の基底として (2.5), (2.6) でその特別な形が仮定された $e_1,\cdots,e_\mu$ は $\Psi(x,t,z)$ の性質に強く依存するため、次の仮定をさらに課さざるを得ない。

仮定 II 式 (2.5), (2.6) で設定された $e_i(z)$ を $Q_\varphi(s')$ の $\mathbb{C}[s_1]\otimes\mathcal{O}_U$ 自由加群の基底 $g_i(z)$ $i=1,\cdots,\mu,$ (3.7) として採用することができる。

以降、簡単のため $mod(d_z(\varphi(z,0)+\sum_{j=2}^m s_je_j(z)))$ によって $\mathbb{C}[z,s_1]\otimes\mathcal{O}_U$ におけるイデアル $(d_z(\varphi(z,0)+\sum_{j=2}^m s_je_j(z)))\mathbb{C}[z,s_1]\otimes\mathcal{O}_U$ の剰余類を表すこととする。加群 $Q_\varphi(s')$ の自由性よりこの剰余類は一意的に定まる。

仮定 (2.5), (2.6) および Weierstrass 準備定理により次の分解が得られる。

$$(\varphi(z,0)+\sum_{j=2}^m s_je_j(z))\cdot\frac{\partial\varphi(z,s)}{\partial s_i}$$

$$\equiv\sum_{\ell=1}^\mu\sigma_i^\ell(s')\frac{\partial\varphi(z,s)}{\partial s_\ell}\ \ mod(d_z(\varphi(z,0)+\sum_{j=2}^m s_je_j(z))),\ 1\le i\le\mu \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\varphi(z,s)}{\partial s_i}\equiv\sum_{\ell=1}^\mu\sigma_i^\ell(s')\frac{\partial\varphi(z,s)}{\partial s_\ell}\ \ mod(d_z(\varphi(z,0)+\sum_{j=2}^m s_je_j(z))),\ \mu+1\le i\le m, \tag{3.9}$$

ただし $\sigma_i^\ell(s')\in\mathcal{O}_U$ である。

持ち上げ可能なベクトル場に関する議論 [6],Theorem A4, [15], Proposition 2 (両方とも局所的状況を扱っているが、ここでの大域的状況にも適応可能) を用いて次のベクトル場が判別式集合 D_φ に接することを見ることができる。

$$\vec{v}_i := (s_1+\sigma_i^i(s'))\frac{\partial}{\partial s_i}+\sum_{\ell=1,\ell\ne i}^\mu\sigma_i^\ell(s')\frac{\partial\varphi(z,s)}{\partial s_\ell},\ 1\le i\le\mu \tag{3.10}$$

仮定I, (i) により変数 $(s_1,s_2,\cdots,s_\nu)$, $\nu\ge\mu$ を $\mathbb{C}\times U$ の局所座標として採用することができる。これより次の接ベクトルを考えておけば十分である。

$$\vec{v}_i := -\frac{\partial}{\partial s_i}+\sum_{\ell=1}^\mu\sigma_i^\ell(s')\frac{\partial}{\partial s_\ell},\ \ \mu+1\le i\le\nu, \tag{3.11}$$

互いに独立な項$s_1\frac{\partial}{\partial s_i}$、$1 \leq i \leq \mu$および$-\frac{\partial}{\partial s_i}$、$\mu+1 \leq i \leq \nu$が介在するため、(3.10), (3.11) は$\mathbb{C}[s_1] \otimes \mathcal{O}_U$という環の上で一時独立である。 したがってこれらのベクトル場は階数νの自由$\mathbb{C}[s_1] \otimes \mathcal{O}_U$加群をなす。

第$i-$行目がベクトル$\vec{v}_i$に対応するような行列を次のようにして作ることとする。

$$\Sigma(s) := \begin{pmatrix} s_1+\sigma_1^1(s') & \sigma_1^2(s') & \cdots & \sigma_1^\mu(s') & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_2^1(s') & s_1+\sigma_2^2(s') & \cdots & \sigma_2^\mu(s') & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_\mu^1(s') & \sigma_\mu^2(s') & \cdots & s_1+\sigma_\mu^\mu(s') & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_{\mu+1}^1(s') & \sigma_{\mu+1}^2(s') & \cdots & \sigma_{\mu+1}^\mu(s') & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{\nu-1}^1(s') & \sigma_{\nu-1}^2(s') & \cdots & \sigma_{\nu-1}^\mu(s') & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \sigma_\nu^1(s') & \sigma_\nu^2(s') & \cdots & \sigma_\nu^\mu(s') & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

実際のところ$\Sigma(s)$の以下の$\mu\times\mu$部分行列にD_φの本質的な幾何学的情報が含まれている。

$$\tilde{\Sigma}(s) := \begin{pmatrix} s_1+\sigma_1^1(s') & \sigma_1^2(s') & \cdots & \sigma_1^\mu(s') \\ \sigma_2^1(s') & s_1+\sigma_2^2(s') & \cdots & \sigma_2^\mu(s') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^1(s') & \sigma_\mu^2(s') & \cdots & s_1+\sigma_\mu^\mu(s') \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Theorem 3.5. *1)* 判別式集合D_φへの接ベクトルのなす代数$Der_{\mathbb{C}\times U}(log\ D_\varphi)$ (*[13]*) は自由$\mathbb{C}[s_1] \otimes \mathcal{O}_U$加群として (3.10), (3.11) のベクトルv_i, $1 \leq i \leq \nu$によって生成される。

2) 判別式集合D_φの定義方程式は

$$D_\varphi = \{s \in \mathbb{C} \times U : det\ \tilde{\Sigma}(s) = 0\}$$

によって与えられる。*3)* 写像ιによるD_φの逆像は複素大波面$BW = \cup_{t\in\mathbb{C}} W_t \subset \mathbb{C}^{n+1}$を含む。つまり$BW \subset \iota^{-1}(D_\varphi)$.

略証明 1),2) の証明は [10] で述べられたものを我々の状況に適応することによってなされる。[16] 2章参照。

3) は補題 2.1, (2.4) と写像ιの定義 (2.7) より従う。略証明終わり

4 自由および概自由波面

定理 3.5 において示されたように$\mathbb{C}[s_1] \otimes \mathcal{O}_U$加群として$Der_{\mathbb{C}\times U}(log\ D_\varphi)$は自由加群となるため，$D_\varphi$は$s \in D_\varphi$の各点の近傍において（齋藤恭司の意味での）自由因子を定める。点sにおけるD_φの対数的接ベクトル空間$T_s^{log} D_\varphi$を次のように定めよう：

$$T_s^{log} D_\varphi = \{\vec{v}(s) : \vec{v}(s) \in Der_{\mathbb{C}\times U}(log\ D_\varphi)_s\} \tag{4.1}$$

文献 [7], [12] において概自由因子の概念が導入され，その消滅ホモロジーの次元などが計算された。複素大波面 BW が自由因子となるか否かを判定する条件を確立するために、代数的横断性の概念を導入する。 仮定 I, (ii) を写像 ι の像に課したために次のような包含関係が生ずる，

$$d_{x,t}\iota(T_{(x,t)}\mathbb{C}^{n+2}) \subset T_{\iota(x,t)}(\mathbb{C}\times U),$$

ここで (x,t) は (x_0,t_0) の近傍の点とする。

Definition 4.1. 写像 ι が D_φ に対して点 $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^{n+2}$ において代数的に横断的であるとは次の条件が満たされていることをいう

$$d_{x,t}\iota(T_{(x_0,t_0)}\mathbb{C}^{n+2}) + T^{log}_{\iota(x_0,t_0)}D_\varphi = T_{\iota(x_0,t_0)}(\mathbb{C}\times U). \tag{4.2}$$

Lemma 4.1. *([12] 自由性に対するヤコビアン判定法)* 因子 $\iota^{-1}(D_\varphi)$ が自由であるための必要十分条件は写像 ι の D_φ に対する代数的横断性である。

波面 $\iota^{-1}(D_\varphi)$ が自由因子であるかどうかの判定法を定式化するために, 次の $m\times(\nu+n+2)$ 行列 $T(x,t)$ を導入する。

$$T(x,t)=\begin{pmatrix}
s_1+\sigma_1^1(s'(x,t)) & \cdots & \sigma_1^\mu(s'(x,t)) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\sigma_2^1(s'(x,t)) & \cdots & \sigma_2^\mu(s'(x,t)) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
\sigma_\mu^1(s'(x,t)) & \cdots & s_1+\sigma_\mu^\mu(s'(x,t)) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\sigma_{\mu+1}^1(s'(x,t)) & \cdots & \sigma_{\mu+1}^\mu(s'(x,t)) & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots\\
\sigma_\nu^1(s'(x,t)) & \cdots & \sigma_\nu^\mu(s'(x,t)) & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0\\
s_1(x,t)_{x_1} & \cdots & s_\mu(x,t)_{x_1} & s_{\mu+1}(x,t)_{x_1} & \cdots & s_\nu(x,t)_{x_1} & \cdots & s_m(x,t)_{x_1}\\
s_1(x,t)_{x_2} & \cdots & s_\mu(x,t)_{x_2} & s_{\mu+1}(x,t)_{x_2} & \cdots & s_\nu(x,t)_{x_2} & \cdots & s_m(x,t)_{x_2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
s_1(x,t)_{x_{n+1}} & \cdots & s_\mu(x,t)_{x_{n+1}} & s_{\mu+1}(x,t)_{x_{n+1}} & \cdots & s_\nu(x,t)_{x_{n+1}} & \cdots & s_m(x,t)_{x_{n+1}}\\
s_1(x,t)_t & \cdots & s_\mu(x,t)_t & s_{\mu+1}(x,t)_t & \cdots & s_\nu(x,t)_t & \cdots & s_m(x,t)_t
\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

行列 $T(x,t)$ の初めの ν 行は $\Sigma(\iota(x,t))$ のそれに対応し、$(\nu+i)-$ 行は (2.7) の $\iota(x,t)$ に対し $\frac{\partial}{\partial x_i}\iota(x,t)$, $1\le i\le n$ を、そして最後の行は $\frac{\partial}{\partial t}\iota(x,t)$ を表している。

補題 4.1 と定理 3.5 を合わせて次の命題を得る。

Proposition 4.2. 時空点 (x,t) の近傍において $\iota^{-1}(D_\varphi)$ が自由因子芽を与えるための必要十分条件は $rank\ T(x,t)\ge\nu$ という不等式が成立することである。

[11]II において我々の (2.2) の記号を用いれば $\frac{\psi_-(x,t,z)}{|(d_zF(z)),1)|}$ に対応する関数（平行接平面関数と名付けられている）が焦点の周りで普遍変形を与えているか否かということが調べられている。一般に $\mathcal{K}-$ 普遍変形を与えるような変形空間内の判別式集合は自由因子芽を定義することが知られているので（齋藤恭司 [13]、E.Looijenga）、この場合波面が焦点の周りで自由因子芽を与えていることが示されていることとなる。

ちなみにある種の変形の臨界値集合が自由因子であることからそれが普遍変形から導出されたということは従わない。つまり齋藤 - Looijenga の定理の逆は成り立たない。たとえば $s_1+s_3x^2+s_5x^4+x^6$ という A_5 特異点の変形（普遍変形ではない）の判別式を計算すると $-64s_1(27s_1^2+4s_3^3-18s_1s_3s_5-s_3^2s_5^2+4s_1s_5^3)^2$ であるがこれは自由因子を定める。

定理 3.5 より、各点 s の近傍において超曲面 D_φ は自由因子の芽を与える。

Definition 4.2. 点 $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^{n+2}$ における超平面芽 $\iota^{-1}(D_\varphi)$ が $\iota(x_0, t_0) \in \mathbb{C} \times U$ における自由因子芽 D_φ を基とする概自由因子芽であるとは、写像 $i_0 : \iota^{-1}(D_\varphi) \to D_\varphi$ であって (x_0, t_0) 以外の点では D_φ と代数的横断的に交わるようなものが存在することをいう。ここで i_0 は $\iota^{-1}(D_\varphi) = i_0^{-1}(D_\varphi)$ を満たしているものとする。

この定義より $\iota^{-1}(D_\varphi)$ が概自由因子を定めるための十分条件が次のように定式化される。

Proposition 4.3. 次の不等式がある孤立点 $(x_0, t_0) \in \iota^{-1}(D_\varphi)$ で成立しており、

$$rank\ \Sigma(\iota(x_0, t_0)) + rank\ d_{x,t}\iota(x_0, t_0) < \nu, \tag{4.4}$$

(x_0, t_0) の近傍の他の点 $(x, t) \neq (x_0, t_0)$ においては $rank\ T(x, t) \geq \nu$ が満たされているとき、点 $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^{n+2}$ における超平面芽 $\iota^{-1}(D_\varphi)$ は $\iota(x_0, t_0) \in \mathbb{C} \times U$ における自由因子芽 D_φ を基とする概自由因子芽となる。

以下の例 5.1 でみるように、波面 $\iota^{-1}(D_\varphi)$ が概自由因子となるかどうかという判定基準の中で、最も確認することが難しいのが (4.4) 式が孤立した点 (x_0, t_0) において満たされているという条件である。代数的横断性が孤立点においてのみ破れているということの十分条件を下記のように $T(x_0 + \xi, t + \tau)$ の 1 次近似式の言葉で表現することができる。十分小さい $(\xi, \tau) \neq (0, 0)$ に対して 1 次近似式 $T(x_0, t) + \tau\frac{\partial T}{\partial t}(x_0, t_0) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial T}{\partial x_j}(x_0, t_0)$ が最高階数の行列であればその 2 次以上の近似も同様に最高階でなければならず、結局 $T(x_0 + \xi, t + \tau)$ も最高階である。

Proposition 4.4. 焦点 (x_0, t_0) において (4.4) の状況にあるとする。写像 ι が $rank\ d_{x,t}\iota(x_0, t_0) = n + 1$ を満たすとき、次の不等式を満たす (ξ, τ) が $(0, 0)$ に限る時，焦点 (x_0, t_0) は代数的横断性を満たさぬ孤立点である。

$$T(x_0, t) + \tau\frac{\partial T}{\partial t}(x_0, t_0) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial T}{\partial x_j}(x_0, t_0) < \nu. \tag{4.5}$$

5 例

1. 平面上の波面の伝播

次のような初期波面を平面上で考えよう。$Y := \{(z, u) \in \mathbb{C}^2; az^2 + z^4 + u = 0\}$, つまり非零実定数 a に対し $F(z) = az^2 + z^4$ とおく。 この際我々の相関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}\Psi(x, t, z) &= (x_1 + az^2 + z^4 + (x_2 - z)(2az + 4z^3))^2 - t^2(1 + (2az + 4z^3)^2), \\ &= -t^2 + x_2^2 + 4ax_1x_2z + (-4a^2t^2 + 4a^2x_1^2 - 2ax_2)z^2 \\ &\quad (-4a^2x_1 + 8x_1x_2)z^3 + (a^2 - 16at^2 + 16ax_1^2 - 6x_2)z^4 \\ &\quad -20ax_1z^5 + (6a - 16t^2 + 16x_1^2)z^6 - 24x_1z^7 + 9z^8.\end{aligned} \tag{5.1}$$

$(x_1, x_2, t) = (0, -\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a})$ がその繊維上の特異点として $(z, u) = (0, 0)$ を持つような焦点であることは下記の (5.2) などからすぐに分かる。ここでこの特異点の Milnor 数は $a \neq 1$ の時 $\mu(0) = 3$ であり (A_3 特異点、つまり燕の尾。)、$a = 1$ の時 $\mu(0) = 5$ (A_5 特異点) である。

$$\Psi(0, -\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}, z) = (-(1/a) + a^2)z^4 + (-(4/a^2) + 6a)z^6 + 9z^8. \tag{5.2}$$

この多項式 $\Psi(0, -\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}, z)$ に対応する商環 (2.5) は $\mu = 7$ 次元のベクトル空間である。
特に $e_i = z^{i-1}$, $i = 1, \cdots, 7$ という (3.7) の基底を採用する。相関数 (5.1) は z^7 の項も含むので、$e_8 = z^7$ をも含めたものを写像 ι、 (2.7) の成分の形から変形多項式として用いることとする。写像 ι は具体的に次の多項式で与えられることとなる。

$$s_1 = -t^2 + x_2^2, s_2 = 4ax_1x_2, s_3 = -4a^2t^2 + 4a^2x_1^2 - 2ax_2, s_4 = -4a^2x_1 + 8x_1x_2,$$

$$s_5 = a^2 - 16at^2 + 16ax_1^2 - 6x_2, s_6 = -20ax_1, s_7 = 6a - 16t^2 + 16x_1^2, s_8 = -24x_1. \quad (5.3)$$

これより

$$\varphi(z, s) = 9z^8 + \sum_{i=1}^{8} s_i z^{i-1}.$$

この場合仮定I,(i) で導入された構成可能集合 U としては $\mathbb{C}^7$ そのものをとって構わない。
焦点 $(x, t) = (0, -1/2a, 1/2a)$ において行列 $\iota^*(\Sigma)(0, -1/2a, 1/2a)$ は次の形を持ち、その階数は $a \neq 1$ の時 5 であり、$a = 1$ の時 3 である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (-1+a^3)/(2a) & 0 & -(1/a^2)+(3a)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & A_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & A_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4(-1+a^3)/a & 0 & 6(-(4/a^2)+6a) & 0 & 72 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

ここで $A1 = \frac{-(2-5a^3+3a^6)}{36a^3}$, $A_2 = \frac{-(4-6a^3+3a^6)}{12a^4}$, $A_3 = \frac{-4+10a^3-9a^6+3a^9}{216a^5}$, $A_4 = \frac{(-2+a^3)^2(-2+3a^3)}{72a^6}$, $A_5 = -\frac{(-2+a^3)^2(2-5a^3+3a^6)}{1296a^7}$, $A_6 = -\frac{16-56a^3+68a^6-30a^9+3a^{12}}{432a^8}$.
したがって

$$d_{x,t}\iota(0, -1/2a, 1/2a) \quad (5.5)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -(4/a)-4a^2 & 0 & -20a & 0 & -24 \\ 0 & -(1/a) & 0 & -2a & 0 & -6 & 0 & 0 \\ -(1/a) & 0 & -4a & 0 & -16 & 0 & -(16/a) & 0 \end{pmatrix}$$

と合わせて $a \neq 1$ であれば $rank\, T(0, -1/2a, 1/2a) = 8 = \nu$ ということになる。 命題 4.2 によって, $a \neq 1$ の場合複素大波面 BW の焦点 $(0, -1/2a, 1/2a)$ の近傍における芽は自由因子を定めることがいえる。
パラメータ $a = 1$ の場合 $rank\, \iota^*(\Sigma)(0, -1/2, 1/2) = rank\, \iota^*(\tilde{\Sigma})(0, -1/2, 1/2) + 1 = 3$ であり

$$rank\, T(0, -1/2, 1/2) = 6 < 8$$

となるので、焦点において ι の代数的横断性は破れている。問題はこの点の近傍のあらゆる点では代数的横断性が成立しているということを確認することである。

まずはじめに (5.4), (5.5) から次の関係が得られることを注意しよう。

$$span_{\mathbb{C}}\{v_1(\iota(0,-1/2,1/2)),\cdots,v_8(\iota(0,-1/2,1/2))\}$$
$$\cap span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial\iota}{\partial t},\frac{\partial\iota}{\partial x_1},\frac{\partial\iota}{\partial x_2}\}_{(0,-1/2,1/2)}=\{0\}.$$

これの意味するところはベクトル場 $\{v_1(s),\cdots,v_8(s)\}$ の積分多様体芽(つまり A_5 特異点に対応する判別式集合 $D_{\varphi,\iota(0,-1/2,1/2)}$ の滑層) と像 $\iota(\mathbb{C}^3,0)$ は $\iota(0,-1/2,1/2)$ において横断的に交わっているということである。しかしながらこれだけでは焦点以外のその近傍のすべての点で代数的横断性が成立していることを示したことにはならない。焦点に A_4 特異点を持つ波面の点が隣接しているとすると、そこでも代数的横断性は破れていることになるからである。

焦点の孤立性の証明 1

A_5 特異点をもつ焦点 $(0,-1/2,1/2)$ の近傍において $\Psi(x,t,z)$ が A_4 特異点を持つとすると、その点において $T(x,t)$ の階数は $7(<8)$ となり命題 4.3 の条件がそこでも満たされないこととなる。こういった状況が生じているとすると（つまり A_4 特異点の滑層が焦点に隣接している (adjacent) とすると）代数的横断性の破れは孤立点でのみ起こっているのではなく、そこに隣接する非離散的集合上でも起こっていることとなる。D_φ 上の A_4 特異点の滑層（$\mathbb{C}\times U$ 変形パラメータ空間における話！）が ι の $(\mathbb{C}^3,0)$ の像に含まれないことをいえば、$rankT(x,t)\geq 8$ がすべての $(x,t)\neq(0,-1/2,1/2)$ において成り立っていることを示したことになる。

A_k $(k\geq 4)$ 特異性を原点の近傍にもつような (5.2) の変形多項式は $(w_1,q_1,q_2,q_3)\approx(0,0,2,0)$ に対して

$$(z+w_1)^5(q_1+q_2z+q_3z^2+9z^3),$$

で与えられる。言い方を変えれば $\mathbb{C}\times U$ 変形パラメータ空間における A_k $(k\geq 4)$ 特異性に対応する滑層の和は

$$(s_1,\cdots,s_8)=$$
$$(q_1w_1^5, 5q_1w_1^4+q_2w_1^5, 10q_1w_1^3+5q_2w_1^4+q_3w_1^5, 10q_1w_1^2+10q_2w_1^3+5q_3w_1^4+9w_1^5,$$
$$5q_1w_1+10q_2w_1^2+10q_3w_1^3+45w_1^4, q_1+5q_2w_1+10q_3w_1^2+90w_1^3, q_2+5q_3w_1+90w_1^2, q_3+45w_1)$$

という4パラメータ表示を持つということである。この滑層の和の $(w_1,q_1,q_2,q_3)=(0,0,2,0)$ における上記パラメータ表示の一階導関数を計算すると,

$$(0,0,0,0,0,1,0,0),(0,0,0,0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0,0,0,1),(0,0,0,0,0,10,0,45)$$

という4本のベクトルが得られる。これらのなす3次元空間と $span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial\iota}{\partial t},\frac{\partial\iota}{\partial x_1},\frac{\partial\iota}{\partial x_2}\}_{(0,-1/2,1/2)}$ とのベクトル空間としての交わりは $\{0\}$ に限られるので、A_k $(k\geq 4)$ 特異性は ι の $(\mathbb{C}^3,0)$ の像には現れないことがいえる。

焦点の孤立性の証明 2

焦点 $(0,-1/2,1/2)$ が代数的横断性を満たさぬ孤立点であるということを命題 4.4 を用いて実証する。式 (4.5) の左辺はこの場合次のように表される。

$$T(0,-1/2,1/2)+\tau\frac{\partial T}{\partial t}(0,-1/2,1/2)+\xi_1\frac{\partial T}{\partial x_1}(0,-1/2,1/2)+\xi_2\frac{\partial T}{\partial x_2}(0,-1/2,1/2), \quad (5.6)$$

上の式のうち $T(0,-1/2,1/2)$ は既に (5.4), (5.5) で与えられており $(A_1 = A_3 = A_5 = 0)$、そのほかの一階微分に対応する行列は下記で与えられる。

$$\frac{\partial T}{\partial t}(0,-1/2,1/2) =$$

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -3 & 0 & -8 & 0 & -4 & \\
0 & 0 & 0 & -(23/9) & 0 & -(20/3) & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(17/18) & 0 & -(23/9) & 0 & -(20/3) & 0 \\
0 & -(1/108) & 0 & -(55/54) & 0 & -(14/9) & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(1/108) & 0 & -(55/54) & 0 & -(14/9) & 0 \\
0 & 1/648 & 0 & 1/324 & 0 & -(20/27) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/648 & 0 & 1/324 & 0 & -(20/27) & 0 \\
0 & -8 & 0 & -64 & 0 & -96 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & -8 & 0 & -32 & 0 & -32 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}(0,-1/2,1/2) =$$

$$\begin{pmatrix}
0 & -(7/4) & 0 & -5 & 0 & -7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(155/36) & 0 & -(35/6) & 0 \\
0 & 1/72 & 0 & -(19/12) & 0 & -(10/3) & 0 & 0 \\
-(1/432) & 0 & -(1/72) & 0 & -(367/216) & 0 & -(127/36) & 0 \\
0 & -(1/432) & 0 & -(1/72) & 0 & -(10/9) & 0 & 0 \\
1/2592 & 0 & 1/432 & 0 & 7/1296 & 0 & -(233/216) & 0 \\
0 & 1/2592 & 0 & 1/432 & 0 & 5/27 & 0 & 0 \\
-2 & -4 & -12 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 32 & 0 & 32 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2}(0,-1/2,1/2)=$$

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -(3/2) & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(4/3) & 0 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(35/36) & 0 & -(4/3) & 0 & -3 & 0 \\
0 & -(1/216) & 0 & -1 & 0 & -(5/6) & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(1/216) & 0 & -1 & 0 & -(5/6) & 0 \\
0 & 1/1296 & 0 & 0 & 0 & -(31/36) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/1296 & 0 & 0 & 0 & -(31/36) & 0 \\
0 & -8 & -12 & -64 & -100 & -96 & -168 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

問題は (5.6) の 8×11 行列が原点の近傍にあっては $(\mathbb{C}^3,0)\ni(\xi_1,\xi_2,\tau)=(0,0,0)$ においてのみ最大階数 8 を実現しないということを示すことである。そのために共通因子を持たないような 8×8 小行列式を見つけることにすると、結果として次の 3 つの小行列式を選びだすことができる。ここで $[i,j,k,...]$ は (5.6) の第 $i,j,k,...$ 番目の行を抽出して作った 8×8 小行列の行列式を表す。

$[2,3,4,5,6,9,10,11]=-(1/629856)(1+2\tau)(-26375\xi_1^4+2736000\xi_1^6+75\xi_1^2\xi_2-3607340\xi_1^4\xi_2+35822\xi_1^2\xi_2^2-128882400\xi_1^4\xi_2^2-63\xi_2^3+3745724\xi_1^2\xi_2^3+7752\xi_2^4+145648320\xi_1^2\xi_2^4-228912\xi_2^5-564480\xi_2^6+150\xi_1^2\tau-3771240\xi_1^4\tau+108554\xi_1^2\xi_2\tau-127423040\xi_1^4\xi_2\tau-288\xi_2^2\tau+15696808\xi_1^2\xi_2^2\tau+33456\xi_2^3\tau+874793984\xi_1^2\xi_2^3\tau-909120\xi_2^4\tau-5862912\xi_2^5\tau+65882\xi_1^2\tau^2-4347040\xi_1^4\tau^2-423\xi_2\tau^2+19603756\xi_1^2\xi_2\tau^2+51840\xi_2^2\tau^2+1597520576\xi_1^2\xi_2^2\tau^2-576528\xi_2^3\tau^2-21357312\xi_2^4\tau^2-198\tau^3+7793672\xi_1^2\tau^3+37608\xi_2\tau^3+1165455872\xi_1^2\xi_2\tau^3+1674816\xi_2^2\tau^3-35292672\xi_2^3\tau^3+11472\tau^4+297749760\xi_1^2\tau^4+2519616\xi_2\tau^4-26821632\xi_2^2\tau^4+948480\tau^5-7587840\xi_2\tau^5)$

$[1,2,3,4,7,9,10,11]=-(1/1259712)\xi_1(1+2\tau)(76350\xi_1^2-164788000\xi_1^4+34276302\xi_1^2\xi_2+103592000\xi_1^4\xi_2+86199\xi_2^2+713267428\xi_1^2\xi_2^2+34011132\xi_2^3+449873344\xi_1^2\xi_2^3+609191424\xi_2^4+45487104\xi_2^5+26929272\xi_1^2\tau-366445280\xi_1^4\tau+156171\xi_2\tau+1261872756\xi_1^2\xi_2\tau+91985280\xi_2^2\tau+2456644800\xi_1^2\xi_2^2\tau+27586185 76\xi_2^3\tau+1704362752\xi_2^4\tau+64746\tau^2+513993608\xi_1^2\tau^2+79461960\xi_2\tau^2+2959890048\xi_1^2\xi_2\tau^2+4075937376\xi_2^2\tau^2+6931880448\xi_2^3\tau^2+22045680\tau^3+915923456\xi_1^2\tau^3+2473498560\xi_2\tau^3+9805062144\xi_2^2\tau^3+534405248\tau^4+5785665536\xi_2\tau^4+1221525504\tau^5)$

$[2,3,4,7,8,9,10,11]=(1/104976)(1+2\tau)(-22905\xi_1^2-61775\xi_1^3+47258800\xi_1^4+126574400\xi_1^5+317923200\xi_1^6-150\xi_1\tau+2018048\xi_1^2\tau+5899670\xi_1^3\tau+298068920\xi_1^4\tau+314084800\xi_1^5\tau+1608\tau^2+20858\xi_1\tau^2+17422224\xi_1^2\tau^2+28405248\xi_1^3\tau^2+401763200\xi_1^4\tau^2-152000\tau^3-256124\xi_1\tau^3+42586224\xi_1^2\tau^3+29500672\xi_1^3\tau^3+3107744\tau^4+11033968\xi_1\tau^4+60317440\xi_1^2\tau^4+22877568\tau^5+29401856\xi_1\tau^5+32102400\tau^6)$

SINGULARの計算によると代数連立方程式 $[2,3,4,5,6,9,10,11]=[1,2,3,4,7,9,10,11]=[2,3,4,7,8,9,10,11]=0$ は $(\xi_1,\xi_2,\tau)=(0,0,0)$ を多重度 12 の孤立解としてもつ。これは命題 4.4 の十分条件が満たされていることを意味する。

以上により2通りの証明が次の命題に対して与えられたことになる。

Proposition 5.1. 複素大波面 BW はその焦点 $(x_1, x_2, t) = (0, -1/2a, 1/2a)$ において $a \neq 1$ の場合自由因子芽を定める。$a = 1$ の場合焦点 $(x_1, x_2, t) = (0, -1/2, 1/2)$ において概自由因子芽を定める。

2. 3次元空間内の波面の伝播

3次元空間内の次のような初期波面を考える $Y := \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 : -\frac{1}{2}(k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2) + u = 0\}$, i.e. $F(z) = -\frac{1}{2}(k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2)$ for $0 < k_1 < k_2$. この場合我々の相関数は次のような表示を持つ

$$\Psi(x,t,z) = (-x_3 + k_1(x_1 - z_1)z_1 + k_2(x_2 - z_2)z_2 + 1/2(k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2))^2 - t^2(1 + k_1^2 z_1^2 + k_2^2 z_2^2),$$

$$\begin{aligned}
&= -t^2 + x_3^2 - k_1^2 x_1 z_1^3 + (k_1^2 z_1^4)/4 - 2k_2 x_3 (x_2 - z_2) z_2 \\
&-k_2^2 t^2 z_2^2 - k_2 x_3 z_2^2 + k_2^2 (x_2 - z_2)^2 z_2^2 + k_2^2 (x_2 - z_2) z_2^3 + (k_2^2 z_2^4)/4 \\
&+z_1^2(-k_1^2 t^2 + k_1^2 x_1^2 + k_1 x_3 - k_1 k_2 (x_2 - z_2) z_2 - 1/2 k_1 k_2 z_2^2) \\
&+z_1(-2k_1 x_1 x_3 + 2k_1 k_2 x_1 (x_2 - z_2) z_2 + k_1 k_2 x_1 z_2^2) \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

点 $(x_1, x_2, x_3, t) = (0, 0, 1/k_1, 1/k_1)$ が Milnor 数 $\mu(0) = 3$ を特異点 $(z, u) = (0, 0)$ で持つような焦点であることは下式より理解される。

$$\Psi(0, 0, 1/k_1, 1/k_1, z) = (k_1^4 z_1^4 + 4k_1 k_2 z_2^2 - 4k_2^2 z_2^2 + 2k_1^3 k_2 z_1^2 z_2^2 + k_1^2 k_2^2 z_2^4)/4k_1^2.$$

多項式 $\Psi(0, 0, 1/k_1, 1/k_1, z)$ は A_3 特異点を原点に持つための条件 [11], Theorem 2.2, (2) を満たしている。焦点 $(x_1, x_2, x_3, t) = (0, 0, 1/k_2, 1/k_2)$ においても状況は同様である。多項式 $\Psi(0, 0, 1/k_1, 1/k_1, z)$ に対する商環 (2.5) のベクトル空間としての次元は $\mu = 5$ である。

次の単項式を (3.7) の基底として選ぶことができる、

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{1, z_1, z_1^2, z_2, z_2^2\}.$$

(5.7), に対して (2.7), (2.8) を考えるため次のような変形単項式を追加的に導入する。$e_6 = z_1 * z_2, e_7 = z_2^3$, $e_8 = z_1^3$, $e_9 = z_1^2 * z_2$, $e_{10} = z_1 * z_2^2$ これによって写像 ι が次のように与えられる。

$$s_1 = -t^2 + x_3^2, s_2 = -2k_1 x_1 x_3, s_3 = -k_1^2 t^2 + k_1^2 x_1^2 + k_1 x_3, s_4 = -2k_2 x_2 x_3$$

$$s_5 = -(k_2/k_1) + k_2^2/k_1^2 - k_2^2 t^2 + k_2^2 x_2^2 + k_2 x_3, s_6 = 2k_1 k_2 x_1 x_2$$

$$s_7 = -k_2^2 x_2, s_8 = -k_1^2 x_1, s_9 = -k_1 k_2 x_2, s_{10} = -k_1 k_2 x_1.$$

写像 $\iota(\mathbb{C}^4) \subset \mathbb{C}^{10}$ の像は構成可能集合 $\mathbb{C} \times U$ に含まれ、行列 $\Sigma(s)$ はその各点で定義される。$s \in \mathbb{C} \times U$. 各点 $(x, t) \in \mathbb{C}^4$ において

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z]}{d_z(\Psi(x, t, z))\mathbb{C}[z]} = 5,$$

が成立する。これは仮定 I,(ii) の条件が満足されていることを意味する。SINGULAR による直接計算で $dim\ U = 5$ であることが分かる。たとえば次の次元の比較からこれを見ることができる。

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z]}{d_z(\Psi(0, 0, 1/k_1, 1/k_1, z) + \sum_{i=1}^{6} s_i e_i)\mathbb{C}[z]} = 5,$$

であるが、一方 $j = 7, 8, 9, 10$ に対しては

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[z]}{d_z(\Psi(0,0,1/k_1,1/k_1,z) + \sum_{i=1}^{6} s_i e_i + s_j e_j)\mathbb{C}[z]} = 7,$$

となる。このことは仮定 I,(i) が $\nu = 6$ に対して満たされていることを意味する。

焦点 $(x_1, x_2, x_3, t) = (0, 0, 1/k_1, 1/k_1)$ において行列 $\iota^*(\Sigma)$ は次のような形をしており、階数は 3 である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2(k_1-k_2)/2k_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_1-k_2)^2/k_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_1-k_2)^2/k_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これと

$$d_{x,t}\iota(0,0,1/k_1,1/k_1) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1^2 & 0 & -k_1k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2k_2/k_1 & 0 & 0 & -k_2^2 & 0 & -k_1k_2 & 0 \\ 2/k_1 & 0 & k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/k_1 & 0 & -2k_1 & 0 & -2k_2^2/k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を合わせると $rank\, T(0,0,1/k_1,1/k_1) = 7 \geq \nu$ が導出される。

命題 4.3 により, 焦点 $(0,0,1/k_1,1/k_1)$ の近傍で波面は自由因子芽を定めることが結論される。

以上の例から推測されるように、焦点強度 μ_f を時空間の次元 $n+1$ よりも十分大きく取るような $F(z)$ を選ぶことによって系統的に概自由波面を作ることが期待される。このような $F(z)$ の候補を選び出すことは比較的簡単にできる。上記例 2 で扱った初期曲面を実係数 4 次式 $az_1^4 + k_2z_2^2 + bz_1^2z_2^2 + cz_2^4$ を用いて変形し

$$F(z) = -(1/2)(k_1z_1^2 + az_1^4 + k_2z_2^2 + bz_1^2z_2^2 + cz_2^4)$$

とおく。この時距離 2 乗関数 (2.4)′ は

$$\Phi(x,t,z) = t^2 - (x_1 - z_1)^2 - (-z_2 + x_2)^2 - (1/2(-k_1z_1^2 - az_1^4 - k_2z_2^2 - bz_1^2z_2^2 - cz_2^4) + x_3)^2,$$

で与えられるが、点 $(x,t) = (0,0,1/k_1,1/k_1)$ に A_3 以上の強度の焦点を持つためには

$$\Phi(0,0,1/k_1,1/k_1,z) =$$

$$(-1 + k_2/k_1)z_2^2 + z_1^2((b/k_1 - 1/2k_1k_2)z_2^2 - (ck_1 - bk_2)/2z_2^4 - 1/2bcz_2^6)$$
$$+(c/k_1 - k_2^2/4)z_2^4 - 1/2ck_2z_2^6 - (c^2z_2^8)/4$$
$$+z_1^6(-((ak_1)/2) - 1/2abz_2^2) + z_1^4(a/k_1 - k_1^2/4 - (bk_1 - ak_2)z_2^2/2 - (b^2/4 - ac/2)z_2^4) - (1/4)a^2z_1^8,$$

が $z=(0,0)$ において $\mu_f>3$ を実現していなければならない。たとえば $a=k_1^3/4$ とおくことによって z_1^4 の係数を消すことができるが、この場合 $z=(0,0)$ における特異点は A_5 である。

また $k_1=k_2$ とおくと、z_2^2 の係数が消えて、$(a/k_1-k_1^2/4)z_1^4+(b/k_1-k_1k_2/2)z_1^2z_2^2+(c/k_1-k_2^2/4)z_2^4+\ldots$ という特異点 (Brieskorn-Pham 特異点と同型) が原点に表れるが、この場合 $\mu_f=9$ である。

これら強度の高い焦点の周りで波面が実際に概自由因子を与えているということ（つまり焦点の孤立性）を証明するには、上記例 1 で行ったようなベクトル場の階数を計算しなければならないばかりか、焦点における隣接滑層からそこに向かう接ベクトルに沿った極限をも計算せねばならない（焦点の孤立性の証明 1 参照）。筆者はこれらの問題に一般的な枠組みを与えるには至っておらず、現在この問題を滑層などの言葉を用いて記述することを検討中である。

References

[1] F.Aicardi, *Étude des équidistantes des ellipsoïdes*, 私家版ノート, (1999).

[2] V.I.Arnol'd,S.M.Gusein-Zade, A.N.Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts.* Monographs in Mathematics, 82. Birkhäuser, 1985.

[3] V.I.Arnol'd, *Wave front evolution and equivariant Morse lemma,* Comm.Pure.Appl.Math. **29** (6),(1976), pp. 557-582.

[4] V.I.Arnol'd, *Topological problems of the theory of wave propagations,* Russian Math.Surveys **51** (1),(1996), pp. 3-50.

[5] S.A.Broughton, *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces,* Invent.Math. **92** (1988), pp. 217-241.

[6] J.W.Bruce, *Functions on discriminants,*J.London Math.Soc. **30** (1984), pp.551-567.

[7] J.Damon, *Higher multiplicities and almost free divisors and complete intersections,* Memoirs of AMS **589** AMS, Providence, RI (1996).

[8] J.Damon, D.Mond, *$\mathcal{A}-$codimension and the vanishing topology of discriminants,* Invent.Math. **106** (1991), pp.217-242.

[9] A.Dimca, M.Saito, *Algebraic Gauss-Manin systems and Brieskorn modules,* Amer. J. Math. **123** (2001), pp. 163-184.

[10] V.V.Goryunov, *Projections and vector fields that are tangent to the discriminant of a complete intersection,* Funct. Anal. Appl. **22** (1988), No.2, pp.104-113.

[11] 長谷川大, 平行曲面の特異点, 数理研講究録 vol.1664 (2009), 平行曲面の特異点 II, 本講究録.

[12] D.MOND, *Differential forms on free and almost free divisors,* Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), pp.587-617.

[13] K.SAITO, *Theory of logarithmic differential forms,* J.Fac.Sci. Univ.Tokyo, ser. IA, **27**(1980),No.2, pp. 265-291.

[14] S.TANABÉ, *On geometry of fronts in wave propagations* (Geometry and Topology of Caustics-Caustics '98, Banach Center Publications, vol.50, Inst.Math.,Polish Acad.Sci., 1999, p.287-304.)

[15] S.TANABÉ, *Logarithmic vector fields and multiplication table*, "Singularities in Geometry and Topology", Proceedings of the Trieste Singularity Summer School and Workshop, pp. 749-778, World Scientific, 2007.

[16] S.TANABÉ, *Wave front propagation and the discriminant of a tame polynomial*, 数理研講究録 vol.1664 (2009)